Exercice 3 **4 points**

On considère la fonction f définie sur $]0; 8]$ par

$$f(x) = \frac{10\ln\left(-x^2+7x+9\right)}{x}$$

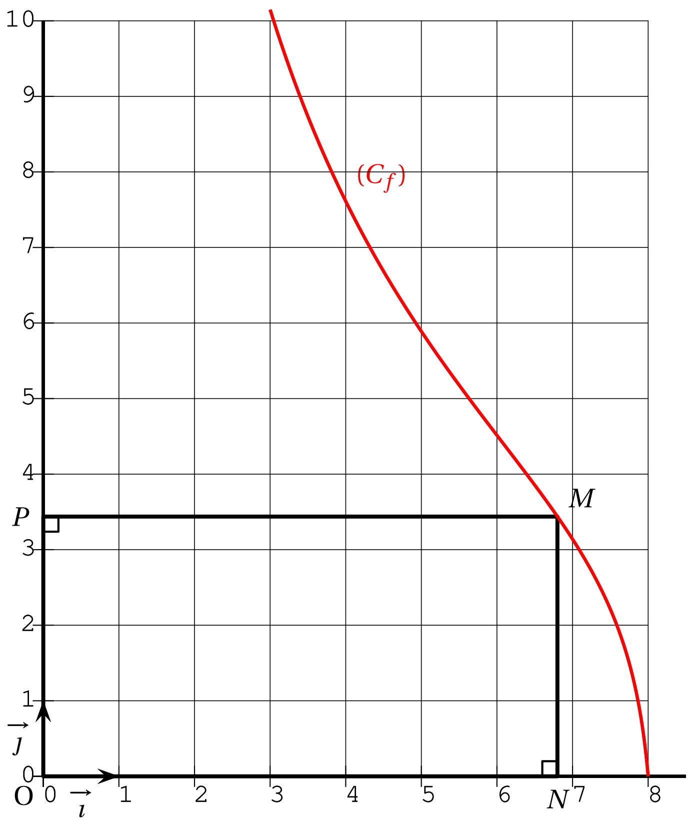
Soit C_f la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-x^2+7x+8 \geqslant 0$.
2. En déduire que pour tout $x \in]0\,;\,8]$, on a $f(x) \geqslant 0$.
3. Interpréter graphiquement ce résultat.

Partie B

La courbe C_f est représentée ci-dessous.
Soit M le point de C_f d'abscisse x avec $x \in]0\,;\,8]$.
On appelle N et P les projetés orthogonaux du point M respectivement sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.
Dans cette partie, on s'intéresse à l'aire $\mathscr{A}(x)$ du rectangle $\mathrm{O}NMP$.



1. Donner les coordonnées des points N et P en fonction de x.

2. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,8]$,

$$\mathscr{A}(x) = 10\ln\left(-x^2 + 7x + 9\right)$$

3. Existe-t-il une position du point M pour laquelle l'aire du rectangle ONMP est maximale ? Si elle existe, déterminer cette position.

Partie C

On considère un réel strictement positif k.
On souhaite déterminer la plus petite valeur de x, approchée au dixième, appartenant à $[3{,}5\,;\,8]$ pour laquelle l'aire $\mathscr{A}(x)$ devient inférieure ou égale à k.
Pour ce faire, on considère l'algorithme ci-dessous.
Pour rappel, en langage Python, $\ln(x)$ s'écrit log (x).

```
from math import *

def A(x) :
  return 10*log (- 1* x**2 + 7*x + 9)

def pluspetitevaleur(k) :
  x = 3.5
  while A(x).......... :
    x = x + 0.1
  return ...........
```

1. Recopier et compléter les lignes 8 et 10 de l'algorithme.

2. Quel nombre renvoie alors l'instruction `pluspetitevaleur`(30) ?

3. Que se passe-t-il lorsque $k = 35$? Justifier.